

Hong Kong Mathematics Olympiad (1996 – 97)

Heat Event (Group)

香港數學競賽 (1996 – 97)

初賽項目 (團體)

Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest forms.  
除非特別聲明，答案須用數字表達，並化至最簡。

1. If  $a_1, a_2, a_3, \dots$  and  $b_1, b_2, b_3, \dots$  are arithmetic sequences, where  $a_1 = 25$ ,  $b_1 = 75$  and  $a_{100} + b_{100} = 100$ . Find the sum of the first 100 terms of the sequence  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$

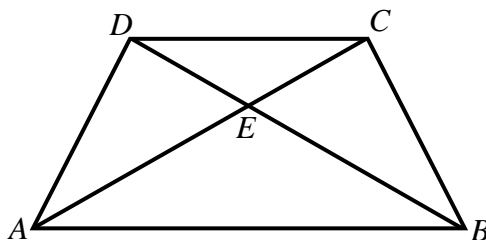
已知  $a_1, a_2, a_3, \dots$  和  $b_1, b_2, b_3, \dots$  為等差數列，其中  $a_1 = 25$ ， $b_1 = 75$  及  $a_{100} + b_{100} = 100$ 。求數列  $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$  的前 100 項的和。

2. If  $f(x) = \frac{2x}{x+2}$  and  $x_1 = 1$ ,  $x_n = f(x_{n-1})$ , find  $x_{99}$ .

已知  $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ ，及  $x_1 = 1$ ， $x_n = f(x_{n-1})$ ，求  $x_{99}$ 。

3.  $ABCD$  is a trapezium, where  $AB \parallel DC$  and area of  $\triangle DCE$  : area of  $\triangle DCB = 1 : 3$ , find area of  $\triangle DEC$  : area of  $\triangle ABD$ .

$ABCD$  為一梯形，其中  $AB \parallel DC$  及  $\triangle DCE$  的面積 :  $\triangle DCB$  的面積 = 1 : 3。求  $\triangle DEC$  的面積 :  $\triangle ABD$  的面積。



4. Let  $x$  be a positive integer. If  $\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} (x-1) - 1 \right) - 1 \right)$  is divisible by 3, find the least possible value of  $x$ .

設  $x$  為一正整數。若  $\frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} \left( \frac{2}{3} (x-1) - 1 \right) - 1 \right)$  能被 3 整除，試求  $x$  之最小可能數值。

5. Pipe  $A$  alone takes 20 hours to fill a tank and pipe  $B$  takes 5 hours to fill the same tank alone. If pipes  $A$  and  $B$  together take  $x$  hours to fill the tank, find the value of  $x$ .

水管  $A$  能於 20 小時內獨自盛滿某一水池，而水管  $B$  則於 5 小時內完成此工作。若兩水管同時使用時盛滿這水池所需的時間則為  $x$  小時，求  $x$ 。

6. Each interior angle of a regular polygon exceeds the exterior angle by  $150^\circ$ . Find the number of sides of the polygon.

一正多邊形的每一內角被外角大  $150^\circ$ 。求此多邊形的邊的數目。

7. If  $x + \frac{1}{x} = 3$ , find the value of  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

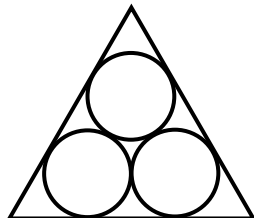
若  $x + \frac{1}{x} = 3$ ，求  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  的值。

8. Five numbers are in arithmetic progression. If the largest number is 7 times the smallest one and the average of the five numbers is 32, find the smallest number.

已知 5 個算術級數中之最大值為最小值之 7 倍，及該 5 個數之平均值為 32。求 5 個數中之最小值。

9. In the figure, three identical circles with radius  $r$  cm are tightly enclosed in a triangle. If the perimeter of the triangle is  $(180 + 180\sqrt{3})$  cm, find  $r$ .

圖中三個半徑為  $r$  cm 之全等圓被一三角形緊緊圍著。若三角形之周界為  $(180 + 180\sqrt{3})$  cm，求  $r$ 。



10. Two fair dice are thrown. Find the probability that the sum is less than 5 and at least one die is a '2'.

投擲兩粒公平的骰子。求其總和為小於 5 及至少一粒骰子為 '2' 的機會率。